Vektorrechnung

Lernkarten 3: Abstände und Winkel

Blätter zum Bedrucken (Vorderseite + Rückseite) und Ausschneiden

Skalarprodukt

Winkel
zwischen Vektoren
Winkel zwischen Geraden und Ebenen

Abstände
zwischen Punkten,
zwischen Punkt und Geraden
zwischen Geraden
zwischen Punkt und Ebene
zwischen Ebenen

Datei Nr. 64501

Stand 9. Januar 2014

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Die einzigartige Reihe meiner Lerntexte zur Vektorgeometrie geht weiter.
Diese gibt es bereits:

Grundlagen: **Vektorgeometrie ganz einfach: Einführung, gründliche Erklärung**

Text 63005	Heft 1	Lineare Algebra und Pfeilvektoren
Text 63100	Heft 2	Das Wichtigste über Geraden
Text 63200	Heft 3	Das Wichtigste über Ebenen
Text 63300	Heft 4	Lage und Schnitte von Geraden und Ebenen
Text 64100	Heft 5	Berechnung von einfachen Abständen und Winkeln
Text 64110	Heft 6	Berechnung von Abständen und Winkeln – komplizierter

Lernblätter: **Kompakt die wichtigsten Methoden zum Wiederholen**

Text 63401	Teil 1	Lagebeziehungen
Text 63402		Aufgabenblatt dazu
Text 64201	Teil 2	Abstände und Winkel
Text 64202		Aufgabenblatt dazu

Trainingstext: **Einfache Pflichtaufgaben, Praxis und Tipps**

Text 63110	Teil 1	Lagebeziehungen von Punkten zu Punkten, Geraden, Ebenen
Text 64150	Teil 2	Abstände und Winkel (in Arbeit)

Lernkärtchen: **Kompakt Methodenwissen: keine Rechnungen**

Text 67501	Teil 1	Serie 1:	Lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren u. a.
			Punkt und Strecke, Gerade, Ebene, Vierecke
Text 67502	Teil 2	Serie 2:	Geradengleichung, Ebenengleichung,
			Lage von Geraden und Ebenen.
Text 67502	Teil 3	Serie 3:	Längen, Abstand Punkt-Gerade, Punkte-Ebene
		Serie 4	Abstand Gerade/Ebene zu Gerade/Ebene

Spezialtexte **zu besonderen Themen**

Text 63033	zu	Spiegelungen und Projektionen
Text 63040	zu	Schattenaufgaben
Text 63050	zu	Punktmengen, Geradenscharen, Ebenenscharen u.v.a.
Text 630[illegible]0	zu	Teilverhältnissen
Texte 64030/1/2	zu	Flugrouten und Schiffspassagen (3 Texte)
Texte 65011/2/3	zu	Kugeln
Texte 66111/2	zum	Vektorprodukt (Spatprodukt usw.)

Und noch viele andere …

z. B. Lineare Algebra (lineare Gleichungssysteme mit und ohne Matrizenrechnung)

Anleitung zur Erstellung der Lernkarten

Drucken Sie die Frage-Seiten (mit den nummerierten Feldern) möglichst auf dickeres Papier aus und bedrucken dann die Rückseite mit den (unnummerierten) Antwortfeldern. Es klappt auch mit <u>Duplexdruck!</u>

Dann können Sie aus jedem Blatt 18 Lernkärtchen ausschneiden (Schere oder besser noch Schneidemaschine).

Man kann sie mischen und sich selbst abfragen, oder auch mit einem Partner ein Spiel derart gestalten, dass man sich gegenseitig abfragt. Die Kärtchen, die eine nicht korrekte Antwort erhalten haben, werden auf einen neuen Stapel gelegt, der dann nochmals an die Reihe kommt, so lange bis man alles weiß.

Meine Antworten sind natürlich nur **Vorschläge**, die man auch anders formulieren kann. Dennoch achte man darauf, dass man nichts weglässt. Oftmals sind Schüler da zu großzügig, und die Antwort ist folglich nicht ausreichend. Im Zweifelsfall können Sie auch eine *Anfragemail* an mich senden, wenn Sie unsicher sind, ob das anders auch möglich ist. post@mathe-cd.de

Da man auf den Antwortfeldern wenig Platz hat, muss die Antwort auch (gewollt) knapp ausfallen. In der Kürze liegt die Würze, darin kann aber auch ein Fehler sein.

Wie lerne ich diesen Stoff am besten?

Die Grundlage jedes Erfolges ist das **Methodenwissen!**

Wenn Sie eine Aufgabe lesen, sollten Sie sofort erkennen, welche Methode gefragt ist.

Fehlt dieses Wissen, kann man auch die Aufgabe nicht lösen.

Erst an zweiter Stelle kommt dann die **Routine** ins Spiel, die das sichere Durchrechnen bis hin zum Ergebnis erst ermöglicht.

Übungen zu diesen Fragen und Antworten finden Sie sehr ausführlich erklärt in den Texten, die auf der vorangehenden Seite gelistet sind.
Sie können sich aussuchen, welchen Schwierigkeitsgrad Sie benötigen:

Gründlich Einüben: Dann benötigen Sie die **Grundlagentexte**.
Training für die Prüfung: Dann sind vielleicht die kompakten **Wiederholungstexte** oder **Lernblätter** günstiger
Oder sie entscheiden sich für das Training der **Pflichtaufgaben**.

Über eines sollten Sie sich auf jeden Fall klar sein:

Den Erfolg erreichen Sie <u>nicht</u>, indem Sie einige Seiten in diesen Texten nur <u>lesen</u>!

Dann erreichen Sie vielleicht ein gewisses Verständnis und können erleichtert sagen

„**Jetzt habe ich es kapiert.**“

Doch zwei Drittel der Schüler, die sich damit zufrieden geben, einen Stoff verstanden zu haben, scheitern trotzdem in der Prüfung. Die oft gehörte Antwort lautet oft so:

„Ich konnte alles und hatte dann einen Blackout.“

IRRTUM: Zwischen Verstanden haben und selbst machen können, liegt eine Arbeitsphase, die man ÜBEN nennt, und die einigen **Zeitaufwand** erfordert. Nur dadurch prägen sich die Methoden abrufbar ins Hirn ein. Nur so entsteht ROUTINE, nicht durch „Verstanden haben“.

Guter Rat: Arbeiten Sie meine Aufgaben am Bildschirm durch, schreiben Sie dann eine Aufgabe ab, schalten den Bildschirm aus, und beweisen sich dann, dass Sie es auch alleine rechnen können.

Sie werden staunen, wie oft sie spicken müssen!

3.1 Wie berechnet man die Raumdiagonale d eines Quaders mit den Seiten a, b und c?	3.2 Wie berechnet man das Skalarprodukt aus zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$? Welche Besonderheit hat das Ergebnis?
3.3 Wie berechnet man den Betrag $\lvert\vec{a}\rvert$ eines Vektors? Was ist seine geometrische Bedeutung?	3.4 Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Betrag $\lvert\vec{u}\rvert$ eines Vektors $\vec{u}$ und dem Skalarprodukt $\vec{u}\cdot\vec{u}$?
3.5 Wie berechnet man vektoriell den Abstand zweier Punkte A und B?	3.6 Wie kann man Winkel zwischen (den Pfeilen) zweier Vektoren mit dem Skalarprodukt berechnen?
3.7 Wie weist man nach, dass zwei Vektoren orthogonal sind?	3.8 Wie berechnet man den kleineren Schnittwinkel zwischen Geraden? mit den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$?
3.9 Wie kann man die Schnittwinkel zweier sich schneidender Ebenen sichtbar machen?	3.10 Wie kann man die Schnittwinkel zweier sich schneidender Ebenen berechnen?
3.11 Wie kann man die Schnittwinkel zwischen einer Ebene und einer Geraden sichtbar machen?	3.12 Wie kann man die Schnittwinkel zwischen einer Ebene und einer Geraden berechnen?

$\vec a\cdot\vec b=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ Das Ergebnis ist eine Zahl und <u>kein</u> Vektor!	Raumdiagonale eines Quaders: $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
Der Zusammenhang zwischen dem **Betrag eines Vektors** und dem **Skalarprodukt** $\vec u\cdot\vec u$ ist: $\lvert u\rvert=\sqrt{\vec u\cdot\vec u}$	$\left\lvert\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right\rvert=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}$ Der **Betrag eines Vektors** gibt die **Länge der Vektorpfeile** an
Für die Winkel γ zwischen den Pfeilen der Vektoren $\vec a$ und $\vec b$ gilt: $\cos\gamma=\frac{\vec u\cdot\vec v}{\lvert\vec u\rvert\cdot\lvert\vec v\rvert}$. Es gibt 2 Winkel mit der Summe 360°.	Der Abstand zweier Punkte A und B ist der Betrag des Vektors $\vec u=\overrightarrow{AB}=\vec b-\vec a$: $\overline{AB}=\lvert\vec u\rvert=\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}$
Die Schnittwinkel zweier Geraden wird aus ihren Richtungsvektoren berechnet: $\cos\gamma=\frac{\lvert\vec u\cdot\vec v\rvert}{\lvert\vec u\rvert\cdot\lvert\vec v\rvert}$ Durch den Betrag erhält man den kleineren Winkel.	Aus der Formel $\vec u\cdot\vec v=\lvert\vec u\rvert\cdot\lvert\vec v\rvert\cdot\cos\gamma$ folgt, dass zwei Vektoren orthogonal sind, wenn ihr **Skalarprodukt Null** ist (vorausgesetzt, $\vec u$ und $\vec v$ sind keine Nullvektoren).
Die Schnittwinkel zweier Ebenen und die Winkel zwischen ihren Normalenvektoren sind gleich groß: $\cos\gamma=\frac{\vec n_1\cdot\vec n_2}{\lvert\vec n_1\rvert\cdot\lvert\vec n_2\rvert}$	Man schneidet die beiden Ebenen mit einer dritten Ebene senkrecht zur Schnittgeraden. Dadurch werden die Schenkel der vier Schnittwinkel sichtbar.
Der kleinere Winkel zwischen der Normalen zur Ebene im Schnittpunkt und der Geraden und der kleinere Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene haben die Summe 90° Daher gilt $\sin\gamma=\frac{\lvert\vec u\cdot\vec n\rvert}{\lvert\vec u\rvert\cdot\lvert\vec n\rvert}$	Projiziert man die Gerade senkrecht auf die Ebene, dann erkennt man den Schnittwinkel zwischen der Geraden und ihrer Projektion.

Usw.